第 2 章　质点动力学

本章总览	① 本章的大部分内容已经在高中翻来覆去学好几遍了，相信大家已经了如指掌 ② 期末考中本章不考大题，只考 1～2 道小题

一　牛顿定律相关

1. **牛顿第二定律**

牛顿第二定律

$$\boldsymbol{F}=m\boldsymbol{a}$$

2. **常见的力**

① **万有引力**

· 任意两个质点间都存在的吸引力

万有引力

$$\boldsymbol{F}=-G\frac{m_1m_2}{r^2}\hat{\boldsymbol{r}}$$

· G — **引力常量** $6.67\times10^{-11}\ \mathrm{N\cdot m^2/kg^2}$　$\hat{\boldsymbol{r}}$ — 两质点间连线方向的单位矢量，模长为 1

· 特殊的万有引力 —— **重力**

重力

$$\boldsymbol{P}=m\boldsymbol{g}$$

温馨提示	你已经是成熟的大学生了，g 必须要取 $9.8\mathrm{m/s^2}$ 了

② **弹性力**

· **弹簧的弹性力**

胡克定律

$$\boldsymbol{F}=-k\boldsymbol{x}$$

k：劲度系数　$\boldsymbol{x}$：弹簧偏离平衡位置的位移

· **绳子拉紧时的内部弹性力（张力）**

张力

$\boldsymbol{T}$ 处处相等（若绳的质量忽略不计）

· **压力 / 支持力 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{N}}$**

③ **摩擦力**

· **静摩擦力 f_0**

两个相互接触的物体沿接触面有相对滑动趋势而未相对滑动时，接触面间产生的阻碍该趋势的力

产生相对滑动趋势的力增大至一定值时，产生相对滑动，此时的静摩擦力为**最大静摩擦力**

最大静摩擦力

$$f_{0\max}=\mu_0F_{\mathrm{N}}$$

· **滑动摩擦力 f**

接触面有相对滑动时，接触面之间的摩擦力

滑动摩擦力

$$f=\mu F_{\mathrm{N}}$$

④ **非惯性系**

若 K' 系相对 K 以加速度 $\boldsymbol{a}_0$ 运动，则物体在 K' 系中的受力需要加上惯性力

惯性力

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{i}}=-m\boldsymbol{a}_0\ （平动）\quad 或\quad \boldsymbol{F}_i=-m\omega^2r\boldsymbol{e}_{\mathrm{n}}\ （转动）$$

· $\boldsymbol{e}_{\mathrm{n}}$ 代表惯性离心力方向始终朝外

例 1 （12—13，2）质量为 m 的物体自空中落下，它除受重力外，还受到一个与是速度平方成正比的阻力的作用，比例系数为 k，k 为正值常量，该下落物体的收尾速度（即物体最后作匀速运动时的速度）将是__________。

解 由已知条件，阻力 $f=-kv^2$，则合外力 $F=mg-kv^2=ma$，收尾时 $a=0$，因此 $v=\sqrt{mg/k}$

二 动量相关

1. 求冲量

① **动量**

动量

$$\boldsymbol{p}=m\boldsymbol{v}$$

② **冲量**（单位：N·s）

冲量

$$\boldsymbol{I}=\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{F}\mathrm{d}t$$

③ **质点动量定理**

· 质点所受合外力的**冲量** $\boldsymbol{I}$ 等于该时间段内质点动量的增量

动量定理

$$\boldsymbol{I}=\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}_0=m\boldsymbol{v}-m\boldsymbol{v}_0$$

例 2 （18—19，3）一颗子弹在枪筒里从静止开始前进时所受的合力大小随时间变化关系为 $F=400-\dfrac{4\times10^5}{3}t$（SI），子弹从枪口射出时的速率为 300m/s。子弹走完枪筒全长所用时间为 0.003s，则子弹走完枪筒全长这一过程中所受合力的冲量 $I=$_______，子弹的质量 $m=$_______。

解 根据定义，冲量 $I=\displaystyle\int_{t_0}^{t}F\mathrm{d}t=\int_{0}^{0.003}\left(400-\frac{4\times10^5}{3}t\right)\mathrm{d}t=0.6\mathrm{N\cdot s}$

根据动量定理，$I=mv-mv_0=m(300-0)$，解得 $m=2\times10^{-3}\mathrm{kg}$

例 3 （14—15，1）一个力 F 作用在质量为 1.0kg 的质点上，使之沿 x 轴运动。已知在此力作用下质点的运动学方程为 $x=3t-4t^2+t^3$（SI）。在 0 到 4s 的时间间隔内，力 F 的冲量大小为__________。

解 此题若按重力求冲量需要对 $x\sim t$ 式求二阶导后再积分，较麻烦，不如用动量定理

求 $v\sim t$ 关系：$v=\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=3-8t+3t^2$，则 0s 时速度 $v_0=3\mathrm{m/s}$，4s 时速度 $v=19\mathrm{m/s}$

根据动量定理，$I=mv-mv_0=1.0\times(19-3)=16\mathrm{N\cdot s}$

2. **动量守恒定律**

① **质点系动量定理**

· 质点系：由若干个质点组成的系统，其受力分为 **内力**：系统内质点之间的相互作用力

外力：系统外的物体对系统内的质点的作用力

· 质点系动量定理：质点系总动量 $\boldsymbol{P}=\Sigma\boldsymbol{p}_i$ 的增量等于合外力的冲量

② **动量守恒定律**

· 若质点系所受合外力为 0，则质点系总动量保持不变

动量守恒定律

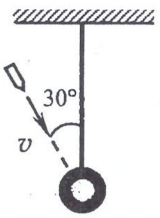
$$\boldsymbol{P}=\Sigma m_i\boldsymbol{v}_i=\text{constant}.$$

· 若仅如果仅在某个方向合外力为零，则动量在此方向上的**分量**守恒

碰撞、爆炸等过程**内力>>外力，系统动量可视为守恒**

动量定理和动量守恒定律都只适用于惯性系

例 4 （13–14，3）质量为 20g 的子弹，以 400m/s 的速率沿图示方向射入一原来静止的质量为 980g 的摆球中，摆线长度不可伸缩。子弹射入后开始与摆球一起运动的速率为__________。



解 在水平方向上，该过程可以视为无外力作用，因此动量守恒

初态：子弹速度 400sin30°m/s 摆球速度 0 末态：子弹和摆球速度均为 v（均为水平分量）

因此有 $20\times400+980\times0=(20+980)\times v$，解得 $v=4\text{m/s}$

三 质心运动定律

1. **质心**

· 代表一个质点系的质点，质量 m，位矢 $\boldsymbol{r}_C$

质心质量	质心位矢	质心速度	质心加速度
$m=\sum m_i$	$\boldsymbol{r}_c=\dfrac{\sum m_i\boldsymbol{r}_i}{m}$	$\boldsymbol{v}_c=\dfrac{\sum m_i\boldsymbol{v}_i}{m}$	$\boldsymbol{a}_c=\dfrac{\sum m_i\boldsymbol{a}_i}{m}$

若质量是连续分布的，则 Σ 应该改为对 dm 积分

2. **质心运动定律**

· 质点系总动量 $\boldsymbol{P}$ 等于质心动量，所受合外力 $\boldsymbol{F}$ 等价于质心所受合外力

质心运动定律

$$\boldsymbol{P}=m\boldsymbol{v}_C \qquad \boldsymbol{F}=m\boldsymbol{a}_C$$

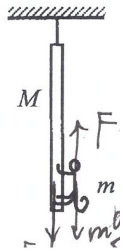
一类具体过程搞不明白的题型

特征：多物体（一般两物体）发生不清不楚的相互作用，具体过程分析不明白

解法：若确定没有外力作用，可以用动量守恒定律；如果有外力，可以用质心运动定律

此外还可以尝试使用角动量守恒定律（见对应部分）

例 4 （14—15，2）如图所示，一只质量为 m 的猴，原来抓住一根用绳吊在天花板上的质量为 M 的直杆，旋线突然断开，小猴则沿杆子竖直向上爬以保持它离地面的高度不变，此时直杆下落的加速度为__________。



解 线断开后，小猴和直杆间的作用不明不白，但除此之外，这俩都只受到重力的作用

那么就等价于这俩组成的质点系的质心只受到重力作用

因此根据质心运动定律，质心加速度等于 $a_C = g$，而根据定义质心加速度 $a_C = \dfrac{Ma_M + ma_m}{M+m}$

由题意小猴相对地面高度不变，得 $a_m = 0$，解得 $a_M = \dfrac{M+m}{M}g$

四　机械能相关

1.功

功
$\mathrm{d}A = \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}$　　$A = \int_s \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}$

· 第二类曲线积分，s 代表位移路径

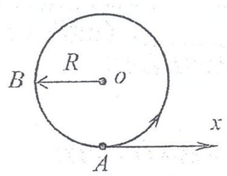
· 符号：$A<0$ 物体对外界做功，$A>0$ 外界对物体做功

2.动能定理

· 合外力对质点做的功能与质点动能的增量

动能	动能定理
$E_k = \dfrac{1}{2}mv^2$	$A = \dfrac{1}{2}mv^2 - \dfrac{1}{2}mv_0^2$

例 5 （09—10，2）如图所示，沿着半径为 R 的圆周运动的质点所受的几个力中有一个是恒力 F_0，方向始终沿 x 轴正向，当质点从 A 点沿逆时针方向走过 3/4 圆周到达 B 点时，力 F_0 所作的功为 $W=$__________。



解 **常规方法**：设质点所处位置与 oA 夹角 θ，则位移 $\mathrm{d}r = R\mathrm{d}\theta$，与 $\boldsymbol{F}_0$ 的夹角

通过几何关系得就是 θ，因此 $\mathrm{d}A = \boldsymbol{F}_0\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} = F_0R\cos\theta\mathrm{d}\theta$，从而 $A = \int_0^{\frac{3}{2}\pi} F_0R\cos\theta\mathrm{d}\theta = -F_0R$

简便方法：$\mathrm{d}A = \boldsymbol{F}_0\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}$，也就是 F_0 乘上 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 在 x 轴的投影，也就是 $\mathrm{d}x$，又由于 F_0 为常数，因此积分直接得到 $A = F_0\Delta x$，由于从 A 到 B，$\Delta x = -R$，因此做功 $A = -F_0R$

例 6 （14—15，1）一个力 F 作用在质量为 1.0kg 的质点上，使之沿 x 轴运动。已知在此力作用下质点的运动学方程为 $x = 3t - 4t^2 + t^3$（SI）。在 0 到 4s 的时间间隔内，力 F 对质点所做的功为__________。

解 此题与例 3 属于同一题，与求冲量的小问一个道理，若用定义式求要得到 $F\sim x$ 关系，非常麻烦，不如用动能定理。之前已经求出了 0s 时速度 $v_0 = 3\mathrm{m/s}$，4s 时速度 $v = 19\mathrm{m/s}$，则做功

$$A = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = 176\mathrm{J}$$

3. **势能（一般定义看教材，这里只介绍常见力学势能种类）**

引力势能	重力势能	弹性势能
$E_p=-G\dfrac{m_1m_2}{r}$	$E_p=mgh$	$E_p=\dfrac{1}{2}kx^2$
· r：两点间距离	· h：距零势能面的高度	· x：弹簧伸长量

4. **功能原理与机械能守恒定律**

① **功能原理**

· **外力做功与非保守内力做功之和等于系统机械能（动能与势能之和）的增量**

功能原理

$$A_{外}+A_{内非}=(E_k+E_p)-(E_{k0}+E_{p0})$$

② **机械能守恒定律**

· **无外力与非保守内力做功时，系统机械能不变**

机械能守恒定律

$$E_k+E_p=E_{k0}+E_{p0}\quad \text{if}\quad \text{无外力与非保守内力做功}$$

机械能守恒题型

特征：具体过程细节无法确定，但可以确认机械能守恒

解法：统计两状态的动能和势能，列式求解

若方程数量少于未知数数量，再考虑是否能引入动量守恒

例 7　（19–20，3）质量为 m 的一艘宇宙飞船关闭发动机返回地球时，可认为该飞船只在地球的引力场中运动。已知地球质量为 M，万有引力恒量为 G，则当它从距地球中心 R_1 处下降到 R_2 处时，飞船增加的动能应等于____________。

解　飞船只受到地球的引力，因此系统机械能守恒，则动能增量等于飞船引力势能的减量

$$\Delta E_k=E_{p0}-E_p=-G\frac{Mm}{R_1}+G\frac{Mm}{R_2}=GMm\left(\frac{1}{R_2}-\frac{1}{R_1}\right)$$

例 8　（15–16，3）质量分别为 m_1、m_2 的两个物体用一劲度系数为 k 的轻弹簧相连，放在水平光滑桌面上，如图所示。当两物体相距 x 时，系统由静止释放。已知弹簧的自然长度为 x_0，则当两物体相距 x_0 时，m_1 的速度大小为____________。

解　由于桌面水平光滑，因此无摩擦力做功，系统机械能守恒

系统释放前具有的动能为 0，弹性势能为 $\dfrac{1}{2}k(x-x_0)^2$

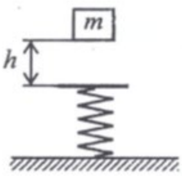
系统释放后两物体相距 x_0 时，弹性势能为 0，动能为 $\dfrac{1}{2}m_1v_1^2+\dfrac{1}{2}m_2v_2^2$

因此$\frac{1}{2}m_1v_1^2+\frac{1}{2}m_2v_2^2=\frac{1}{2}k(x-x_0)^2$，这里有 2 个未知量$v_1$和$v_2$，无法求解

这时要想到系统没有外力，总动量是守恒的：$m_1\boldsymbol{v}_1+m_2\boldsymbol{v}_2=0 \ \rightarrow \ m_1v_1=m_2v_2$

联立，解得$v_1=\sqrt{\frac{km_2(x-x_0)^2}{m_1m_2+m_1^2}}$

例 9 （13–14，2）如图所示，一质量为m的物体，位于质量可以忽略的直立弹簧正上方高度h处，该物体从静止开始落向弹簧，若弹簧的劲度系数为k，不考虑空气阻力，则物体下降过程中可能获得的最大动能为__________。



解 不考虑空气阻力，因此系统机械能守恒，则初始系统具有的机械能为mgh

当物体下降至高度$x>0$时，系统机械能包括重力势能mgx和动能E_k

则$mgh=mgx+E_k \ \rightarrow \ E_k\le mgh$

当物体下降至高度$x<0$时，系统机械能包括重力势能mgx，弹性势能$\frac{1}{2}kx^2$和动能E_k

因此$mgh=mgx+\frac{1}{2}kx^2+E_k \ \rightarrow \ E_k=mgh-mgx-\frac{1}{2}kx^2$

则$\frac{\mathrm{d}E_k}{\mathrm{d}x}=-mg-kx=0\Rightarrow x=-\frac{mg}{k}$，此时$E_k=mgh+\frac{m^2g^2}{2k}>mgh$，因此填$mgh+\frac{m^2g^2}{2k}$

更快速的思路

动能与速度正相关，速度达到最大时，动能最大。本题中物体一开始下落，速度增大，触碰到弹簧时，弹力大小为 0，因此继续下落，此后弹力增大但小于重力，因此加速度大于 0，速度继续增大，直到**弹力超过重力**时，速度开始减小，因此**弹力等于重力**时，速度达到最大，有$mg=-kx$

五　质点角动量相关

1. 基本概念

① **角动量**

· 质点对原点 o 的角动量

角动量
$L=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}=\boldsymbol{r}\times m\boldsymbol{v}$

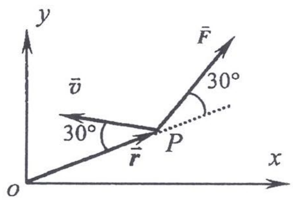
· $\boldsymbol{r}$：质点位矢　　$\boldsymbol{p}$：质点动量

② **力矩**

· 作用于质点的力$\boldsymbol{F}$对原点 o 的力矩

力矩
$\boldsymbol{M}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}$

例 10 （13–14，4）质点P的质量为 2kg，位置矢量为$\boldsymbol{r}$，速度为$\boldsymbol{v}$，它受到力$\boldsymbol{F}$的作用。这三个矢量均在oxy面内，某时刻它们的方向如图所示，且$r=3.0\mathrm{m}$，$v=4.0\mathrm{m/s}$，$F=2\mathrm{N}$，则此刻该质点对原点 o 的角动量$\boldsymbol{L}=$________________；作用在质点上的力对原点的力矩$\boldsymbol{M}=$__________。



解 由定义，$\boldsymbol{L}=\boldsymbol{r}\times m\boldsymbol{v}=rmv\sin\alpha\boldsymbol{k}=3\times2\times4\times\sin150°\boldsymbol{k}=12\boldsymbol{k}\,(\mathrm{kg\cdot m^2/s})$

$$\boldsymbol{M}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}=rF\sin\beta\boldsymbol{k}=3\times2\times\sin150^\circ\boldsymbol{k}=3\boldsymbol{k}\,(\mathrm{N\cdot m})$$（一定要标出矢量方向 $\boldsymbol{k}$ ）

2. 角动量定理与角动量守恒定律

① 质点（系）角动量定理

· 质点（系）对惯性系中固定点 o 的角动量变化值等于质点系所受合外力矩的冲量（**冲量矩**）

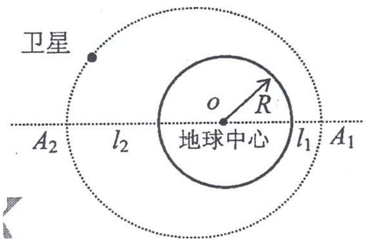
角动量

$$\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{M}\mathrm{d}t=\sum\boldsymbol{L}-\sum\boldsymbol{L}_0$$

② 角动量守恒定律

· 若质点（系）所有外力对固定点 o 的力矩为 0，则质点（系）对该固定点的角动量守恒

例 11 （14—15，6）我国第一颗人造卫星沿椭圆轨道运动，地球的中心 o 为该椭圆的一个焦点。已知地球半径 $R=6378\mathrm{km}$，卫星与地面的最近距离 $l_1=439\mathrm{km}$，与地面的最远距离 $l_2=2384\mathrm{km}$。若卫星在近地点 A_1 的速度为 $v_1=8.1\mathrm{km/s}$，则卫星在远地点 A_2 的速度为 $v_2=$____________km/s。



解 由于外力不产生力矩，因此天体运动过程中角动量守恒：

如图所示：$r_1=l_1+R$，$r_2=l_2+R$，$mv_1r_1=mv_2r_2$，解得 $v_2=6.3\mathrm{km/s}$

例 12 （19—20，4）一轻绳跨过一定滑轮，一猴子抓住绳的一端，绳的另一端挂与一猴子质量相等的重物。若猴子由静止开始向上爬，当猴子相对绳子的速度为 v_0 时，重物上升的速度 V 为__________。

解 猴子、轻绳与重物组成的系统受到的外力为猴子的重力、重物的重力和定滑轮的支持力，其中支持力对滑轮中心点不产生力矩，另外两个重力对滑轮中心产生的力矩等大反向，相互抵消，因此这个系统角动量守恒。则

· 滑轮左侧绳子向下移动的速度等于重物上升的速度 V

则猴子相对地面下降的速度为 $V-v_0$，此时角动量之和为 $m(V-v_0)r+mVr$

· 系统一开始猴子和重物都静止，因此角动量为 0，则 $m(V-v_0)r+mVr=0$，解得 $V=\dfrac{v_0}{2}$

六 其余知识点

1. 密舍尔斯基方程

· 情境：物体运动时，物体（称为**主体**）的质量在连续变化（如火箭、雨滴、提绳子等）

密舍尔斯基方程

$$\boldsymbol{F}+\boldsymbol{v}'\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}=m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}$$

· 参数：① t 时刻下，**主体质量** $m(t)$，**主体速度** $\boldsymbol{v}(t)$，**主体所受合外力** $\boldsymbol{F}(t)$

② 在 $\mathrm{d}t$ 时间内，有质量为 $\mathrm{d}m$ 的流动物加到主体上（即质量变化率）

流动物相对于主体速度 $\boldsymbol{v}'$

2. **碰撞**

- 共同特点：碰撞前后系统总动量守恒
- **完全弹性碰撞** · 碰撞前后系统**机械能守恒**
- **完全非弹性碰撞** · 碰撞后两物体运动速度相同
- **非完全弹性碰撞** · **恢复系数**，取决于两物体材料，为常数

恢复系数
$e = \dfrac{v_2 - v_1}{v_{10} - v_{20}}$